

全品



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第二册 BS

天津出版传媒集团
天津人民出版社

Contents

01 第一章 数列

PART ONE

§ 1 数列的概念及其函数特性	导 107
1.1 数列的概念	导 107
1.2 数列的函数特性	导 108
§ 2 等差数列	导 110
2.1 等差数列的概念及其通项公式	导 110
第 1 课时 等差数列的概念及其通项公式	导 110
第 2 课时 等差数列的性质及实际应用	导 112
2.2 等差数列的前 n 项和	导 114
第 1 课时 等差数列的前 n 项和	导 114
第 2 课时 等差数列的前 n 项和的性质	导 115
§ 3 等比数列	导 118
3.1 等比数列的概念及其通项公式	导 118
第 1 课时 等比数列的概念及其通项公式	导 118
第 2 课时 等比数列的性质及实际应用	导 120
3.2 等比数列的前 n 项和	导 121
第 1 课时 等比数列的前 n 项和	导 121
第 2 课时 等比数列的前 n 项和的性质	导 123
专项突破练一 求数列通项公式	导 125
专项突破练二 分组求和、倒序相加求和、并项求和	导 127
专项突破练三 裂项相消求和、错位相减求和	导 128
§ 4 数列在日常经济生活中的应用	导 129
§ 5 数学归纳法	导 130
④ 本章总结提升	导 132

§ 1 平均变化率与瞬时变化率	导 135
1.1 平均变化率	导 135
1.2 瞬时变化率	导 135
§ 2 导数的概念及其几何意义	导 137
2.1 导数的概念	导 137
2.2 导数的几何意义	导 138
§ 3 导数的计算	导 140
§ 4 导数的四则运算法则	导 141
4.1 导数的加法与减法法则	导 141
4.2 导数的乘法与除法法则	导 142
§ 5 简单复合函数的求导法则	导 144
§ 6 用导数研究函数的性质	导 146
6.1 函数的单调性	导 146
第 1 课时 导数与函数的单调性	导 146
第 2 课时 函数单调性的应用	导 148
6.2 函数的极值	导 150
第 1 课时 导数与函数的极值	导 150
第 2 课时 函数极值的综合问题	导 152
6.3 函数的最值	导 154
第 1 课时 导数与函数的最值	导 154
第 2 课时 函数最值的综合问题	导 156
§ 7 导数的应用	导 158
7.1 实际问题中导数的意义	导 158
7.2 实际问题中的最值问题	导 160
专项突破练一 构造函数问题	导 162
专项突破练二 函数零点问题	导 164
专项突破练三 不等式问题	导 166
🎧 本章总结提升	导 168

§ 1 数列的概念及其函数特性

1.1 数列的概念

【学习目标】

了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式).

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 数列及其有关概念

1. 数列

按一定_____排列的一列数叫作数列.

2. 数列的项

数列中的_____叫作这个数列的项. 数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 或简记为_____, 其中 a_1 是数列的第 1 项, 也叫数列的_____ ; a_n 是数列的第 n 项, 也叫数列的_____.

3. 数列按项的个数分类

有穷数列: 项数_____的数列.

无穷数列: 项数_____的数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 某同学从 6 岁到 18 岁, 每年在生日那天测量体重, 依次排成一系列数, 可以构成数列. ()
- (2) 数列 $1, 2, 3, 4, \dots, 2n$ 是无穷数列. ()
- (3) $1, 1, 1, 1$ 是一个数列. ()

◆ 知识点二 数列的通项公式

1. 定义: 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与_____之间的函数关系可以用一个式子表示成_____, 那么这个式子就叫作这个数列的_____.

2. 作用: ①求数列的任意一项; ②检验某数是否是该数列中的一项.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ 的第 10 项是 21. ()
- (2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+1} = 2a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_2 = 2a_1$. ()
- (3) 每一个数列都能写出通项公式. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 数列的概念与分类

例 1 (1) 下列有关数列的说法中正确的是 ()

- A. 同一个数列的任意两项均不可能相同
- B. 数列 $-1, 0, 1$ 与数列 $1, 0, -1$ 是同一个数列
- C. 数列 $1, 3, 5, 7$ 可表示为 $\{1, 3, 5, 7\}$
- D. 数列中的每一项都与它的序号有关

(2) 已知下列数列:

- ① $0, 0, 0, 0, 0, 0$;
- ② $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$;
- ③ $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$;
- ④ $1, 0.2, 0.2^2, 0.2^3, \dots$;
- ⑤ $0, -1, 0, \dots, \cos \frac{n\pi}{2}, \dots$.

其中, _____是有穷数列, _____是无穷数列(填序号).

变式 (多选题) 下列结论中正确的是 ()

- A. 数列 $1, 2, 3, 4$ 和数列 $1, 3, 4, 2$ 是相同的数列
- B. 数列可以看作是一个定义在正整数集(或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) 上的函数
- C. 数列的图象是一系列孤立的点
- D. 数列的项数是无限的

[素养小结]

- 1. 判断给出的数列是有穷数列还是无穷数列, 只需考察该数列的项数是有限的还是无限的. 若数列的项数有限, 则是有穷数列, 否则为无穷数列.
- 2. 数列 $1, 2, \dots, n$ 是有穷数列, 数列 $1, 2, \dots, n, \dots$ 是无穷数列.
- 3. 注意数列与集合的表示有本质的区别: 数列有序而集合无序, 数列的项可以重复而集合不能有重复元素.

◆ 探究点二 求数列的通项公式

例 2 若数列 $\{a_n\}$ 的前五项分别为 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式可能是 ()

- A. $a_n = \frac{2n+1}{2^n}$ B. $a_n = \frac{2n-1}{2n}$
C. $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$ D. $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$

变式 (1) 数列 $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \dots$ 的一个通项公式是 ()

- A. $a_n = \frac{n}{2n+1}$ B. $a_n = \frac{n}{2n-1}$
C. $a_n = \frac{n}{2n-3}$ D. $a_n = \frac{n}{2n+3}$

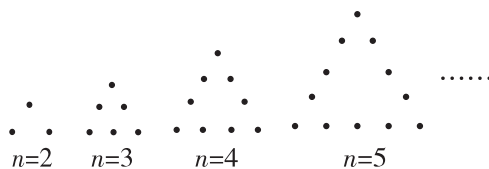
(2) 数列 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ 的一个通项公式是_____.

[素养小结]

根据数列的前几项求其通项公式的解题思路

- (1) 先统一项的结构, 如都化成分数, 根式等.
- (2) 分析结构中变化的部分与不变的部分, 探索变化部分的规律与对应序号间的函数解析式.
- (3) 对于正负交替出现的情况, 可先观察其绝对值, 再用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 处理符号.
- (4) 对于周期数列, 可考虑拆成几个简单数列之和的形式, 或者利用周期函数, 如三角函数等.
- (5) 对于选择题, 一般可以对 n 赋值, 然后逐一排除.

拓展 如图所示, 将若干个点摆成三角形图案, 每条边(包括两个端点)有 n ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 个点, 相应的图案中总的点数记为 a_n , 则 $a_n =$ _____.



1.2 数列的函数特性

【学习目标】

了解数列是一种特殊函数.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 数列的单调性

一般地, 一个数列 $\{a_n\}$, 如果从第 2 项起, 每一项都_____它的前一项, 即_____, 那么这个数列叫作_____数列. 如果从第 2 项起, 每一项都_____它的前一项, 即_____, 那么这个数列叫作_____数列. 如果数列 $\{a_n\}$ 的各项都_____, 那么这个数列叫作_____.

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$ 的数列 $\{a_n\}$ 是递减数列. ()
- (2) 数列 $3, 1, 3, 5, 7, 9$ 是递增数列. ()
- (3) 一个数列不是递增数列, 就是递减数列. ()
- (4) 把数列看作函数时, 它的定义域是正整数集. ()
- (5) 通项公式为 $a_n = 2n - 1$ 的数列 $\{a_n\}$ 与函数 $y = 2x - 1$ 的图象相同. ()

◆ 探究点一 数列与函数的关系

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2}{2n-9}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 画出该数列的图象.

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 - 8n + 5$.

- (1) 写出这个数列的前 5 项, 并作出它们的图象;
 (2) 这个数列中有没有最小项?

[素养小结]

一般而言, 数列是一种特殊的函数. 数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 $\mathbf{N}^*$ (或它的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$) 到实数集 $\mathbf{R}$ 的函数, 其自变量是序号 n , 对应的函数值是数列的第 n 项 a_n , 记为 $a_n = f(n)$, 其图象由一群孤立的点组成.

◆ 探究点二 数列的单调性

例 2 (1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 是 ()

- A. 递增数列 B. 递减数列
 C. 常数数列 D. 摆动数列

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{3n-1}{2n}$, 试判断数列 $\{a_n\}$ 的增减性.

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且其通项公式为 $a_n = n^2 + \lambda n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则实数 λ 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{7}{2}, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
 C. $[-2, +\infty)$ D. $(-3, +\infty)$

[素养小结]

由于数列是特殊的函数, 所以可以用研究函数的思想方法来研究数列的相关单调性, 要注意数列的定义域为正整数集或其有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 这一条件.

◆ 探究点三 数列的最大(小)项

例 3 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 1 + \frac{1}{2n-9} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的最大项和最小项.

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 5n + 4 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 中有多少项是负数?

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的最小项.

[素养小结]

求数列 $\{a_n\}$ 的最大项和最小项,一种方法是利用函数的最值法;另一种方法是利用不等式法,即求最小项可

由 $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1}, \\ a_n \leq a_{n-1} \end{cases}$ 来确定 n ,求最大项可由 $\begin{cases} a_n \geq a_{n+1}, \\ a_n \geq a_{n-1} \end{cases}$ 来确定 n .

若数列是单调的,也可由单调性来确定最大项或最小项,若数列的项是正负交替出现的,求最大项(或最小项),应在其正(或负)项中找.

拓展 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = (n+1)\left(\frac{2023}{2024}\right)^n$,则当 a_n 取得最大值时, n 的值为_____.

§2 等差数列

2.1 等差数列的概念及其通项公式

第1课时 等差数列的概念及其通项公式

【学习目标】

理解等差数列的概念和通项公式的意义.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的有关概念与表示

1. 等差数列与公差: 对于一个数列,如果从第2项起,每一项与它的前一项的差都是同一个常数,那么称这样的数列为_____数列,称这个常数为等差数列的_____,通常用字母 d 表示.

2. 等差数列的递推公式: _____ (d 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$).

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 数列16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, ..., 320 为等差数列. ()

(2) 若一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的差都是常数,则这个数列一定是等差数列. ()

◆ 知识点二 等差数列的通项公式及应用

通项公式: 若首项是 a_1 ,公差是 d ,则等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = kn + b (n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } k, b \text{ 为常数})$,则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列. ()

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n^2, n \in \mathbf{N}^*$,则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. ()

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 3n + 2, n \in \mathbf{N}^*$,则等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是3. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的概念

例1 (1) 下列数列中不是等差数列的是 ()

- A. 0, 0, 0, ..., 0, ...
- B. -2, -1, 0, ..., $n-3$, ...
- C. 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ...
- D. 0, 1, 3, ..., $\frac{n^2-n}{2}$, ...

(2) (多选题) 下列数列中,是等差数列的是 ()

- A. 1, 4, 7, 10
- B. $\lg 2, \lg 4, \lg 8, \lg 16$
- C. $2^5, 2^4, 2^3, 2^2$
- D. 通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ n+1, & n \geq 2 \end{cases}$ 的数列 $\{a_n\}$

[素养小结]

判断一个数列是不是等差数列,就是判断该数列从第2项起每一项与前一項的差是否为同一个常数,即验证 $a_{n+1}-a_n (n \in \mathbf{N}_+)$ 是不是一个与 n 无关的常数.

◆ 探究点二 等差数列的通项公式

例2 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_5 = 10$, $a_{12} = 31$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $a_n = 13$,求 n 的值.

变式 (1)已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_4 = 2$, $a_7 = -4$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = -2n + 10$ B. $a_n = -2n + 5$
C. $a_n = -\frac{1}{2}n + 10$ D. $a_n = -\frac{1}{2}n + 5$

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为1,公差为2的等差数列,若 $a_m = m + 7$,则 $m =$ _____.

[素养小结]

等差数列的通项公式及其应用

- (1)已知 a_n, a_1, n, d 中的任意三个量,可求出第四个量.
(2)由等差数列的通项公式可以求出该数列中的任意项,也可以判断某一个数是不是该数列中的项.
(3)根据等差数列的两个已知条件建立关于“基本量” a_1 和 d 的方程组,求出 a_1 和 d ,从而确定通项公式,求得所要求的项.

◆ 探究点三 等差数列的判定和证明

例3 判断下列数列是否为等差数列.

- (1)在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 3n + 2, n \in \mathbf{N}^*$;
(2)在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n = n^2 + n, n \in \mathbf{N}^*$;

(3)数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1, c_n = c_{n-1} + 2 (n \geq 3)$.

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$,其中 p, q 是常数,且 $p \neq 0$,判断数列 $\{a_n\}$ 是否是等差数列.

[素养小结]

要判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列可以用定义法,也可以直接看通项公式是否为 $a_n = kn + b (k, b \text{ 为常数}, n \in \mathbf{N}^*)$ 的形式,若符合该形式,则该数列为等差数列,否则不是等差数列.

拓展 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_n \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 1, n \geq 2$.

(1)求 a_2, a_3, a_4 ;

(2)证明数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列,并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

第2课时 等差数列的性质及实际应用

【学习目标】

体会等差数列与一元一次函数的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差中项

如果在 a 与 b 之间插入一个数 A , 使 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫作 a 与 b 的 _____, 并且 $A = \frac{a+b}{2}$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 若 $2b = a + c$, 则 c, b, a 三个数成等差数列. ()
- (2) 任意两个实数都存在等差中项. ()

◆ 知识点二 等差数列的性质

1. 等差数列所有项的性质:

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则 $\{c + a_n\}$ (c 为任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则 $\{c \cdot a_n\}$ (c 为任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列;
- (3) 若数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ 分别是公差为 d_1, d_2 的等差数列, 且它们的项数相同, 则数列 $\{pa_n + qb_n\}$ (p, q 为任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列.

2. 等差数列部分项的性质

- (1) 若 $m + n = p + q = 2k$ ($m, n, p, q, k \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q = 2a_k$;
- (2) 在等差数列中, 下标成等差数列的项仍是等差数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_4 = a_6$. ()
- (2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则数列 $\{a_n + 3\}$ 的公差为 $d + 3$. ()
- (3) 若数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 是等差数列, 则数列 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 也是等差数列. ()

◆ 知识点三 从函数的角度研究等差数列

1. 图象: 等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可写成 $a_n = dn + (a_1 - d)$. 点 (n, a_n) 分布在一条以 d 为斜率的直线上, 是这条直线上一列 _____.
2. 等差数列单调性: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 当 _____ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是 _____ 数列; 当 _____ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是 _____ 数列; 当 _____ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是 _____ 数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的单调性是由公差 d 决定的. ()
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 是一次函数, 且该函数的图象过第二、四象限, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = f(n)$, 则数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差中项

例 1 (1) 在等差数列中, 若 a 是 2 和 6 的等差中项, 则 $a =$ _____.

(2) 在 3 与 15 之间插入 3 个数, 使这 5 个数成等差数列, 则插入的 3 个数之和为 ()

- A. 21 B. 24
C. 27 D. 30

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ ($n \geq 2$), 且 $a_2 = 5, a_5 = 13$, 则 $a_8 =$ _____.

[素养小结]

实数 a, b, c 成等差数列的条件是 $b = \frac{a+c}{2}$ (或 $2b = a + c$), 该条件可用来进行等差数列的判定或求解有关等差中项的问题. 如要证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 可通过证明对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 来实现.

◆ 探究点二 等差数列的性质

例 2 (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_9 = 12, a_2 = 4$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 4 B. 8 C. 3 D. 6

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_8 = 10$, 则 $3a_5 + a_7 =$ _____.

变式 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_5, a_{15} 是函数 $f(x) = x^2 - 3x - 2$ 的两个零点, 则 $a_3 + a_8 + a_{12} + a_{17} =$ ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 6

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9 =$ _____.

[素养小结]

解决等差数列运算问题的一般方法: 一是灵活运用等差数列的性质; 二是利用等差数列的通项公式, 转化为等差数列的首项与公差的函数关系求解. 这些方法都运用了整体代换与方程的思想.

拓展 [2024 · 贵州铜仁高二期末] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, 则“ $a_m + a_n = a_p + a_q$ ”是“ $m + n = p + q$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

◆ 探究点三 等差数列与一次函数的关系

例 3 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 点 $P(a_n, a_{n+1})$ 是函数 $y = x + \frac{1}{2}$ 图象上的点, 则 $a_9 =$ ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5

(2) [2024 · 江苏淮安高二期末] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5, a_1 + a_4 = 8$.

- ① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
② 画出数列 $\{a_n\}$ 的图象;
③ 判断数列 $\{a_n\}$ 的增减性.

变式 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且 $a_9 = 2020$, 则 a_1 的最小值是 _____.

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 16$, 公差 $d = -\frac{3}{4}$.

- ① 等差数列 $\{a_n\}$ 从第几项开始出现负数?
② 当 n 为何值时, $|a_n|$ 最小?

[素养小结]

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$, 可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$ (p, q 为常数). 此结论可用来判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列, 也揭示了等差数列的函数本质.

◆ 探究点四 等差数列的实际应用

例 4 假设体育场一角看台的座位从第 2 排起每一排都比前一排多相等数量的座位. 若第 3 排有 10 个座位, 第 9 排有 28 个座位, 则第 12 排有多少个座位?

变式 (1) 某著作中有这样一个问题: 冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气, 自冬至当日起, 其最短日影长依次成等差数列, 已知立春当日的最短日影长为 9.5 尺, 春分当日的最短日影长为 6 尺, 则立夏当日的最短日影长为 ()

- A. 16.5 尺 B. 13 尺
C. 3.5 尺 D. 2.5 尺

(2)把 100 个面包依次分给按一定顺序排列的 5 个人,使每人所得面包的个数成等差数列,且较多的三份面包的个数之和的 $\frac{1}{3}$ 是较少的两份面包个数之和,则最少的一份面包的个数为_____.

[素养小结]

求解等差数列实际应用问题的关键是认真审题,挖掘出“等差”变化的含义,并进一步明确首项、公差、项数等基本量.

2.2 等差数列的前 n 项和

第 1 课时 等差数列的前 n 项和

【学习目标】

1. 探索并掌握等差数列的前 n 项和公式.
2. 理解等差数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.

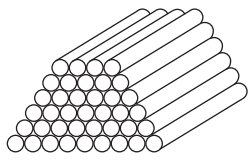
课 前 预 习

知识导学 素养初识

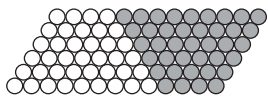
◆ 知识点一 倒序相加法

如果在一个数列 $\{a_n\}$ 中,与首末项等“距离”的两项之和等于首末两项之和,那么求和时可采用把正着写与倒着写的两个和式相加,这样就得到了一个常数列的和,进而求得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,这一求和方法称为_____.

【诊断分析】如图①所示,某仓库堆放了一堆钢管,最上面的一层有 4 根钢管,下面的每一层都比上一层多一根钢管,最下面的一层有 9 根钢管,共有 6 层.



①



②

(1)假设在这堆钢管旁边倒放上同样的一堆钢管,其截面如图②所示,则这样共有_____根钢管.

(2)原来有_____根钢管.

◆ 知识点二 等差数列的前 n 项和公式

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

$$S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

两个公式的关系:把 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 中,就可以得到 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$; 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数且 $A \neq 0$).

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,则 S_n 与 a_n 不可能相等. ()

(2) $S_n = 2n^2 + 3n - 1$ 是某个等差数列的前 n 项和. ()

◆ 知识点三 S_n 与 a_n 的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的前 n 项和的基本运算

例 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,前 n 项和为 S_n .

(1)若 $S_8 = 48, S_{12} = 168$,求 a_1 和 d ;

(2)若 $a_1 = -2, a_2 + a_6 = 2$,求 S_{10} ;

(3)若 $a_1 = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2}, S_n = -15$,求 n 和 a_{12} .

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列,其前 n 项和为 S_n ,且 $d=-4, S_5=40$,问:是否存在大于1的正整数 k ,使得 $S_k=S_1$? 若存在,求 k 的值;若不存在,说明理由.

[素养小结]

在等差数列的五个基本量 a_1, a_n, d, n, S_n 中,已知三个可求其余两个. 求解时,通常先建立关于 a_1 与 d 的方程组,解出 a_1 与 d 后,再求其他量.

◆ 探究点二 S_n 与 a_n 的关系

例2 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_n=2n^2-30n$.

- (1)求 a_1 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列,并说明理由.

变式 (1) [2024·天津耀华中学高二期末] 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-4n+1$,则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|$ 的值为 ()

- A. 65 B. 67 C. 61 D. 56

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-3n+1$.

- ①求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- ②判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列,并说明理由.

[素养小结]

若 S_n 是关于 n 的二次函数,且不含常数项,则由 S_n 可求得 a_n ,数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;否则 $a_n=\begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2, \end{cases}$ 数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

第2课时 等差数列的前 n 项和的性质

【学习目标】

1. 掌握等差数列前 n 项和的性质.
2. 能利用等差数列前 n 项和的函数性质求前 n 项和的最值.
3. 能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,并解决相应的问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的前 n 项和的性质

1. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, $k\in\mathbb{N}^*$,那么_____,_____,_____成等差数列,如图所示.

$$\overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}^{S_k} + \overbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}^{S_{2k}-S_k} + \overbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}^{S_{3k}-S_{2k}}$$

2. 若 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,那么 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和,则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $S_{奇}$ 是前 n 项中奇数项的和, $S_{偶}$ 是前 n 项中偶数项的和,则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=S_{奇}+S_{偶}$,当等差数

列的项数 n 为奇数时,中间一项记为 $a_{\text{中}}$,有如下性质:

- (1)当 n 为偶数时, $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} =$ _____;
 (2)当 n 为奇数时,则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} =$ _____, $S_{\text{奇}} =$ _____, $S_{\text{偶}} =$ _____, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} =$ _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)若 $\{a_n\}$ 是等差数列,则 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6$ 也是等差数列. ()
 (2)若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,则 S_3, S_6, S_9 成等差数列. ()

◆ 知识点二 等差数列的前 n 项和的最值

1. 从二次函数的角度理解等差数列的前 n 项和公式:

公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ 可化成关于 n 的表达式: $S_n =$ _____. 当 $d \neq 0$ 时, S_n 关于 n 的表达式是一个常数项为零的二次函数关系式,即点 (n, S_n) 在其相应的 _____ 函数的图象上,这说明等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数,它的图象是抛物线 $y = \frac{d}{2}x^2 + (a_1 - \frac{d}{2})x$ 上横坐标为正整数的一群孤立的点.

2. 等差数列前 n 项和的最值

(1)利用邻项变号法:

当 $a_1 > 0, d < 0$ 时, S_n 有 _____ 值,使 S_n 取到

最值的 n 可由不等式组 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 确定;

当 $a_1 < 0, d > 0$ 时, S_n 有 _____ 值,使 S_n 取到

最值的 n 可由不等式组 $\begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 确定.

(2)利用二次函数的性质:

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$, 若 $d \neq 0$, 则从二次函数的角度看: 当 $d > 0$ 时, S_n 有 _____ 值; 当 $d < 0$ 时, S_n 有 _____ 值. 当 n 取最接近二次函数图象的对称轴的自然数时, S_n 取到最值.

【诊断分析】等差数列的前 n 项和都有最大值与最小值吗?

◆ 探究点一 等差数列前 n 项和的性质

例 1 [2024 · 江苏无锡高二期末] 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_4 = 6, S_8 = 21$, 则 $S_{12} =$ _____.

变式 设等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为

S_n, T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+3}{3n+15}$, 则 $\frac{a_{10}}{b_{10}} =$ ()

- A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{23}{72}$
 C. $\frac{7}{24}$ D. $\frac{7}{23}$

[素养小结]

等差数列前 n 项和运算的三种思想方法:

- (1)先利用已知条件求出首项和公差,再求所求,是基本解法,有时运算量大些.
 (2)利用等差数列前 n 项和的性质,如果运用得当可以达到化繁为简、化难为易、事半功倍的效果.
 (3)设而不求,整体代换也是很好的解题方法.

拓展 (1)一个等差数列的前 12 项的和为 354, 前 12 项中偶数项的和与奇数项的和的比为 32 : 27, 求公差 d 的值.

(2)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_4 = 11, S_{12} = 9$, 求 S_{20} 的值.

(3)已知数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+2}{n+3}$, 求 $\frac{a_5}{b_5}$.

(4)已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = -2021, \frac{S_{2019}}{2019} - \frac{S_{2023}}{2023} = -4$, 求 S_{2023} .

◆ 探究点二 等差数列前 n 项和的最值

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 25$, $S_{17} = S_9$, 求前 n 项和 S_n 的最大值.

变式 [2024·河南开封高二期末] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 - a_5 = a_4 = 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n 的最大值及取得最大值时 n 的值.

[素养小结]

求等差数列前 n 项和最值的常用思路:

(1) 利用等差数列的单调性, 求出其正、负转折项, 便可求得和的最值;

(2) 利用等差数列的性质求出其正、负转折项, 便可求得和的最值;

(3) 利用等差数列的前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数) 为关于 n 的二次函数, 并结合二次函数的性质求最值.

◆ 探究点三 等差数列前 n 项和的实际应用

例 3 赵老师最近给自己制订了一个 180 千米的跑步健身计划, 计划前面 5 天每天跑 4 千米, 以后每天比前一天多跑 0.4 千米, 则他要完成该计划至少需要 ()

A. 23 天

B. 24 天

C. 25 天

D. 26 天

变式 已知 8 月份有一新款服装投入某市场. 8 月 1 日该款服装仅售出 3 件, 以后每天售出的该款服装都比前一天多 3 件, 当 8 月某日销售量达到最大(只有 1 天)后, 每天售出的该款服装都比前一天少 2 件, 已知 8 月 31 日当天刚好售出 3 件.

(1) 问 8 月几日该款服装销售最多? 最多售出几件?

(2) 按规律, 当该市场销售此款服装达到 200 件时, 社会上就开始流行, 而日销售量连续下降并低于 20 件时, 则不再流行. 问该款服装在社会上流行几天?

[素养小结]

应用等差数列知识解决实际问题的关键是分清是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式问题还是前 n 项和问题, 然后再选择合适的公式求解.

§ 3 等比数列

3.1 等比数列的概念及其通项公式

第1课时 等比数列的概念及其通项公式

【学习目标】

理解等比数列的概念和通项公式的意义.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等比数列的相关概念

等比数列与公比:如果一个数列从_____起,每一项与它的前一项的比值都是同一个常数,那么称这样的数列为_____数列,称这个常数为等比数列的_____,通常用字母 q 表示($q \neq 0$).

以上定义用符号表示为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 或 $a_{n+1} = qa_n$ (q 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$). 等比数列的定义用符号语言表示,其本质是等比数列的递推公式.

【诊断分析】是否存在数列既是等差数列又是等比数列? 如果存在,试举出实例;如果不存在,请说明理由.

◆ 知识点二 等比数列的通项公式

1. 通项公式:若首项是 a_1 , 公比是 q , 则等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

2. 等比数列的图象

在公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = a_1 q^{n-1}$ 可改写成 $a_n = \frac{a_1}{q} q^n$, 当 $q > 0$ 且 $q \neq 1$ 时, $y = q^x$ 是一个_____函数, 故此时等比数列 $\{a_n\}$ 的图象是函数 $y = \frac{a_1}{q} q^x$ 的图象上_____.

3. 等比数列的单调性:由指数函数的性质可知当 $a_1 > 0, q > 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;

当 $a_1 < 0, 0 < q < 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
当 $a_1 > 0, 0 < q < 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列;
当 $a_1 < 0, q > 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列;
当 $q < 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是摆动数列;
当 $q = 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 是常数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = 2, a_5 = 8$, 则 $a_3 = \pm 4$. ()
- (2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 如果公比为 q , 且 $q < 1$, 那么等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列. ()
- (3) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等比数列的概念

例1 (多选题) 下列各数列一定是等比数列的是 ()

- A. $-1, 2, -4, 8$
- B. $1, 2, 3, 4$
- C. $x-1, x-1, x-1, x-1$
- D. $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} (a \neq 0)$

变式 下列数列一定是等比数列的是 ()

- A. 数列 $1, 2, 6, 18, \dots$
- B. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2$
- C. 常数列 $a, a, \dots, a, \dots$
- D. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_{n-1}}{a_n} = q (q \neq 0, n > 1)$

【素养小结】

对于等比数列的概念题, 一定要紧扣它的定义来处理.

◆ 探究点二 等比数列的通项公式

例 2 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

- (1) 若 $a_1=1, a_4=8$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $a_n=625, n=4, q=5$, 求 a_1 ;
(3) 若 $a_2+a_5=18, a_3+a_6=9, a_n=1$, 求 n .

变式 已知递增等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且

$$a_1 a_2 a_6 = 64, a_1 + a_3 + a_5 = 21, \text{ 则 } a_n = \quad (\quad)$$

- A. 2^{n+1} B. 2^{n-1}
C. $3 \times 2^{n-1}$ D. $2 \times 3^{n-1}$

[素养小结]

等比数列的通项公式涉及 a_1, a_n, n, q 四个量, 只要知道其中任意三个就能求出另外一个, 在这四个量中, a_1 和 q 是等比数列的基本量, 只要求出这两个基本量, 问题便迎刃而解.

例 3 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则“ $q>1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的 $(\quad)$

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

变式 (1) (多选题) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 则下列说法正确的是 $(\quad)$

- A. 当 $a_1>0$ 时, $0<q<1$
B. 当 $a_1>0$ 时, $q<0$
C. 当 $a_1<0$ 时, $q>1$
D. $\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则“ $0<q<1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递减数列”的 $(\quad)$

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

◆ 探究点三 等比数列的证明

例 4 [2024·山东泰安一中高二期末] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, na_{n+1}=2(n+1)a_n$, 试证明数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

变式 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n+S_n=n$.

- (1) 设 $c_n=a_n-1$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

[素养小结]

证明等比数列的常用方法: 定义法、通项公式法、构造法.

在条件中出现 $a_{n+1}=ka_n+b(k\neq 0, b\neq 0, k\neq 1)$ 关系时, 往往构造新数列, 方法是把 $a_{n+1}+x=k(a_n+x)$ 与 $a_{n+1}=ka_n+b$ 对照, 求出 x 即可.

拓展 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=\lambda, a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n-4, b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.

- (1) 证明: 对于任意实数 λ , 数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;
(2) 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否可以作为等比数列, 并证明你的结论.

第2课时 等比数列的性质及实际应用

【学习目标】

体会等比数列与指数函数的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等比中项

如果在 a 与 b 之间插入一个数 G , 使得 a, G, b 成等

比数列, 那么根据等比数列的定义, $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}, G^2 = ab$,

$G = \pm\sqrt{ab}$. 我们称 G 为 a, b 的_____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 任意两个非零常数 a, b 都有等比中项. ()

(2) “ $G^2 = ab$ ”是“ a, G, b 成等比数列”的充要条件. ()

◆ 知识点二 等比数列的性质

1. 等比数列任意两项间的关系: 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n =$ _____.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+n=p+s$ ($m, n, p, s \in \mathbb{N}^*$), 则_____. 特别地, 若 $m+n=2p$, 则_____.

3. (1) 在公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, \dots, a_{m+(n-1)k}, \dots$ 仍成等比数列, 公比为_____;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则数列 $\{ka_n\}$ ($k \neq 0$) 也是等比数列, 公比为_____;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则数列 $\{a_n^2\}$ 也是等比数列, 公比为_____;

(4) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是项数相同的等比数列, 则 $\{a_n \cdot b_n\}$ 是_____数列, $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 是_____数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等比数列. ()

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 仍是等比数列, 且公比为 $2q$. ()

(3) 已知等比数列 $\{a_n\}$, 取其奇数项组成一个新数列, 则此数列是等比数列. ()

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是等比数列. ()

(5) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $m+n=p$ ($m, n, p \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_m \cdot a_n = a_p$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等比中项

例1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_2, a_4 的等比中项为 $1, a_6, a_8$ 的等比中项为 4 , 则 $a_5 =$ ()

- A. -2 B. 2
C. ± 2 D. $\pm \frac{1}{2}$

变式 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 9$, 且 a_2, a_4, a_{10} 构成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的公差 d 等于_____.

[素养小结]

(1) 由等比中项的定义可知 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \Rightarrow G^2 = ab \Rightarrow G = \pm\sqrt{ab}$, 所以只有当 a, b 同号时, a, b 的等比中项有两个, 当 a, b 异号时, a, b 没有等比中项.

(2) 在一个等比数列中, 从第二项起, 每一项(有穷等比数列的末项除外)都是它的前一项和后一项的等比中项.

(3) a, G, b 成等比数列等价于 $G^2 = ab$ ($ab > 0$).

◆ 探究点二 等比数列的性质

例2 (1) [2024·湖南郴州高二期末] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_3 是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两根, 求 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的值.

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0$, 若 $a_3 \cdot a_5 = 4$, 求 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$.

变式 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_3 a_7 = 81$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_5 + \log_3 a_9 =$ ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

[素养小结]

(1) 应用等比数列的性质可以简化运算, 当性质不能应用时, 可以通过基本量法求解.

(2) 等比数列中的设元技巧: 当三个数成等比数列时, 可设为 $\frac{a}{q}, a, aq$; 当四个数成公比为正数的等比数列

时, 可设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$.

拓展 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_5 + 2a_4 a_6 + a_5 a_9 = 8$, 则 $a_3 + a_7 =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{2}$

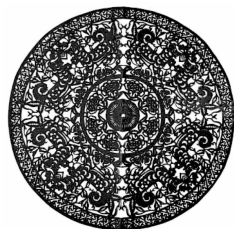
◆ 探究点三 等比数列的实际应用

例 3 某人买了一辆价值为 13.5 万元的新车, 专家预测这种车每年按 10% 的速度贬值.

(1) 用一个式子表示第 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 年这辆车的价值;

(2) 如果他打算用满 4 年时卖掉这辆车, 他大概能得到多少钱? ($0.9^4 \approx 0.66$, 结果保留一位小数)

变式 (1) 在我国古代春节期间, “剪窗花, 贴对联”几乎是每家每户都会进行的迎新活动, 而窗花(俗称剪纸)蕴含着辞旧迎新、接福纳祥的美好寓意.



如图是一幅剪纸作品. 一位艺术家把一张厚度为 0.012 5 cm 的纸对折了三次, 开始了该作品的创作, 若不计纸与纸之间的间隙, 则对折后的半成品的厚度是 _____ mm.

(2) 某养猪场 2021 年年初猪的存栏数(饲养头数)为 1500, 预计以后每年存栏数的增长率为 8%, 且在每年年底卖出 100 头, 则 2036 年年初猪的存栏数约为(参考数据: $1.08^{14} \approx 2.9, 1.08^{15} \approx 3.2, 1.08^{16} \approx 3.4$) ()

A. 2050 B. 2150
C. 2250 D. 2350

[素养小结]

解决等比数列实际应用问题的关键是: 建立数学模型, 即将实际问题转化成等比数列的问题, 解数学模型即解等比数列问题.

3.2 等比数列的前 n 项和

第 1 课时 等比数列的前 n 项和

【学习目标】

1. 探索并掌握等比数列的前 n 项和公式.
2. 理解等比数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 等比数列的前 n 项和

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 其前 n 项和

为 S_n , 则当 $q = 1$ 时, $S_n =$ _____; 当 $q \neq 1$ 时, $S_n =$ _____ = _____.

2. 当 $q \neq 1$ 时, 两个公式的关系: 把 $a_1 q^{n-1} = a_n$ 代

入 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 中, 就可以得到 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=4^n+a$,则 a 的值为1. ()

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3^n+k$ (k 为常数),则数列 $\{a_n\}$ 不可能是等比数列. ()

(3) $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等比数列的前 n 项和的基本运算

例1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,公比为 q ,前 n 项和为 S_n .

(1)若 $a_1=1, a_5=16$,且 $q>0$,求 S_7 ;

(2)若 $S_n=189, q=2, a_n=96$,求 a_1 和 n .

变式 (1)设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,若 $a_2+a_3+a_4=2, a_3+a_4+a_5=4$,则数列 $\{a_n\}$ 的前6项和为 ()

A. 18 B. 16 C. 9 D. 7

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,其前 n 项和为 S_n ,前三项和为13,前三项积为27,则 $S_5=$ _____.

[素养小结]

等比数列前 n 项和的运算注意事项:

(1)基本量的计算常列方程组求解,一般用约分或两式相除的方法进行消元,有时会用到整体代换,如 q^n ,

$\frac{a_1}{1-q}$ 都可看作一个整体.

(2)若公比 q 不确定,则要判断 $q=1$ 还是 $q\neq 1$,若两种情况都有可能,则要分类讨论.

◆ 探究点二 等比数列前 n 项和的实际应用

例2 某公司从2020年年初起生产某种高科技产品,初始投入资金为1000万元,到年底资金增长50%.预计以后每年资金增长率与第一年相同,但每年年底公司要扣除消费资金 x 万元,余下资金再投入下一年的生产.设第 n 年年底扣除消费资金后的剩余资金为 a_n 万元(2020年为第1年).

(1)用 x 表示 a_1, a_2 ,并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;

(2)若该公司希望5年后企业剩余资金达3000万元,试确定每年年底扣除的消费资金 x 的值(精确到万元).

变式 有一个人进行徒步旅行,他6天共走了189千米,第一天健步行走,从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半.则此人第4天和第7天共走了_____千米.

[素养小结]

求解数列应用题的具体方法步骤:

(1)确认是等差数列问题、等比数列问题,还是含有递推关系的数列问题,是求 a_n ,还是求 S_n ,特别要注意准确弄清项数是多少.

(2)抓住数量关系,将文字语言翻译成数学语言,将数量关系用数学式子表达,将实际问题抽象为数学问题.

(3)求解数学问题,检验所得结果,并将符合要求的结果转化为实际问题的结论.